به نام پروردگار یکتا

منطق و زبان‌شناسی

ینس آلوود
لارس-گونار آندرسُن
اُستِن دال

مترجم
فاطمه راکعی

پژوهشگاه علوم انسانی و مطالعات فرهنگی
تهران ۱۳۹۹

پژوهشگاه علوم انسانی و مطالعات فرهنگی

فروشگاه کتاب: خیابان کریم‌خان‌زند، بین قرنی و ایرانشهر، پلاک۱۷۶ تلفن: ۸۸۳۱۷۱۹۲

منطق و زبان‌شناسی

مؤلفین: ینس اَلوود، لارس-گونار اَندرسُن و اُستِن دال
مترجم: فاطمه راکعی
مدیر انتشارات: یدالله رفیعی
مدیر تولید و نظارت: سیدمحمدحسین محمدی
ویراستار: دکتر اسدا... فلاحی
نمونه‌خوان: مهدی قبادی
صفحه‌آرا: جابر شیخ محمدی
مسئول فنی: عرفان بهاردوست
چاپ اول: ۱۳۹۹
شمارگان: ۳۰۰ نسخه
چاپ و صحافی: گام اول
قیمت: ۵۶۰۰۰ تومان

سرشناسه: آلوود، ینس اس.، ۱۹۴۷- م.
-Allwood, Jens S., 1947
عنوان و نام پدیدآور: منطق و زبان‌شناسی/ ینس الوود، لارس - گونار اندرسن، استن دال؛ مترجم فاطمه راکعی.
مشخصات نشر: تهران: پژوهشگاه علوم انسانی و مطالعات فرهنگی، ۱۳۹۹.
مشخصات ظاهری: ۲۷۸ ص.
شابک: 978-622-6304-89-4
وضعیت فهرست نویسی: فیپا
یادداشت: عنوان اصلی: .Logic in linguistics
موضوع: زبان – فلسفه، موضوع: Language and languages – Philosophy
موضوع: منطق ریاضی، موضوع: Logic, Symbolic and mathematical
شناسه افزوده: آندرسون، لارس-گونار، ۱۹۴۷- م.
شناسه افزوده -Andersson, Lars-Gunnar, 1947
شناسه افزوده: دال، اوستن، ۱۹۴۵- م.، شناسه افزوده : -Dahl, Östen, 1945
شناسه افزوده: راکعی، فاطمه، ۱۳۳۳ -، مترجم
شناسه افزوده: پژوهشگاه علوم انسانی و مطالعات فرهنگی
شناسه افزوده: Institute for Humanities and Cultural Studies
رده بندی کنگره: P۱۰۷
رده بندی دیویی: ۴۰۱
شماره کتابشناسی ملی: ۷۵۰۱۱۲۷
وضعیت رکورد: فیپا

فهرست مطالب

فصل پنجم: منطق محمول‌ها

فصل ششم: استنتاج

فصل هفتم: منطق وجهی

فصل هشتم: منطق مفهومی و دستور مقوله‌ای

فصل نهم: گسترش منطق محمول‌ها

فصل دهم: منطق و زبان‌شناسی

مقدمه‌ی مترجم

با کتاب «Logic in Linguistics »، به عنوان کتاب درسی کلاس «زبان و منطق» دکترمحمدرضا باطنی در دوره‌ی فوق‌لیسانس زبان‌شناسی دانشگاه تهران آشنا شدم، که فصل‌هایی از آن توسط ایشان تدریس شد. مطالعات قبلی‌ام در حوزه‌ی منطق و شیوه‌ی تدریس دکتر باطنی، که شوق و انگیزه‌ی پژوهش را در دانشجویان زنده می‌کرد، علاقه‌ی مرا به غور بیش‌تر در رابطه‌ی زبان و منطق، و سپس، انگیزه‌ام را برای ترجمه‌ی کتاب یاد شده، برانگیخت.

گرچه ویرایش نهایی کتاب، به‌خاطر درگیری‌های فکری و عملی‌ام با مسائل اجتماعی، متأسفانه چندین سال به طول انجامید، اما شوق تکمیل و انتشار آن هیچ‌گاه ذهنم را ترک نکرد. خدا را شاکرم که سرانجام ترجمه‌ی این کتاب به فرجام رسید؛ با این امید که محرکی باشد برای پژوهش‌های جدی‌تر در حوزه‌ی میان‌رشته‌ای زبان‌شناسی و منطق.

در این‌جا توضیح موارد زیر را لازم می‌دانم:

۱. در انتخاب معادل‌های فارسی برای واژه‌ها و اصطلاحات تخصصی منطق، منبع اصلی کتاب «واژه‌نامه‌ی توصیفی منطق (انگلیسی به فارسی)»، تالیف ضیاء موحد (۱۳۷۴) به همت انتشارات پژوهشگاه علوم انسانی و مطالعات فرهنگی بوده و برای معادل‌های فنی زبان‌شناسی از «واژگان گزیده‌ی زبان‌شناسی»، تالیف مصطفی عاصی و محمد عبدعلی (۱۳۷۵) چاپ انتشارات علمی و فرهنگی استفاده شده است؛ گرچه در برخی موارد که معادل مناسب در این فرهنگ‌ها موجود نبوده، به منابع دیگر مراجعه شده یا با آقایان، دکتر ضیاء موحد و دکتر اسدالله فلاحی در مورد معادل مناسب مشورت شده است. برای نمونه، می‌توان به تعیین معادل فارسی برای واژه‌های «domain»، «range» و «scope» در حوزه‌های مختلف اشاره کرد. در نظریه‌ی مجموعه‌ها در بخش تابع‌ها برای واژه‌ی «domain»، معادل «دامنه» و برای واژه‌ی «range»، معادل «بُرد» در نظر گرفته شده، درحالی‌که در مبحث ادات‌ها و سورها، واژه‌ی «scope» به «دامنه» و «range» به «گستره» ترجمه شده است.

۲. شیوه‌نامه‌ی اصلی مورد استفاده برای نگارش و تنظیم فرمول‌ها، شیوه‌نامه‌ی مرکز نشر دانشگاهی بوده، گرچه در مواردی، به سایر شیوه‌نامه‌ها و نیز کتاب‌های ترجمه شده‌ی منطق، به ویژه ترجمه‌های دکتر ضیاء موحد، مراجعه شده است.

۳. هرچند در ترجمه، سعی بر رعایت کامل امانت بوده، در برخی موارد، به پیش‌نهاد ویراستار محترم، به منظور درک بهتر مفاهیم از سوی خواننده‌ی فارسی زبان، آگاهانه تغییراتی ایجاد شده است؛ از آن جمله می‌توان به کاربرد اسامی فارسی برای برخی اسامی بیگانه و استفاده از مثال‌های فارسی به جای بعضی از مثال‌های انگلیسی اشاره کرد.

وظیفه‌ی خود می‌دانم از استاد ارجمند، آقای دکتر ضیاء موحد، به خاطر ویرایش علمی اولیه‌ی کتاب، از آقای دکتر اسدلله فلاحی برای ویرایش مجدد آن، هم‌چنین از استاد احمد سمیعی برای تأیید نگارش ادبی آن، قدردانی و سپاس‌گزاری کنم. هم‌چنین از همکاران بزرگوارم، آقای دکتر یحیی مدرسی، خانم دکتر شهین نعمت‌زاده، و آقای دکتر سیامک کاظمی، که از نظرات علمی و فنی ارزشمندشان بسیار بهره برده‌ام، صمیمانه تشکر می‌کنم. از آقای مهدی قبادی که در تنظیم نهایی کتاب بسیار کمک کردند، از خانم زینب جهانبان، که تایپ دقیق اثر را به عهده داشتند و از مسئولان محترم انتشارات پژوهشگاه علوم انسانی و مطالعات فرهنگی، که تایپ مجدد و ویرایش‌های متعدد کتاب را پذیرا بودند، نیز بسیار متشکرم.

فاطمه راکعی
تیر ماه ۱۳۹۹

پیش‌گفتارِ مترجمانِ انگلیسی

کتاب حاضر، مبنای اثری است که با عنوان «درآمدی برمنطق برای زبان‌شناسان» در سال ۱۹۷۱ به زبان سوئدی منتشر شد و ترجمه‌ی آلمانی آن در سال ۱۹۷۳ به چاپ رسید. همه‌ی فصل‌های کتاب سوئدی مورد اصلاح و تجدیدنظر قرار گرفته و مطالبی چند، از جمله کل فصل ۸ به آن افزوده شده، اما هدف تغییر نکرده است: آشنا کردن زبان‌شناسان و دیگر علاقه‌مندان زبان، با منطق، به‌طوری که بتوانند دریابند که مفاهیم منطقی در نظریه‌ی زبانی، به‌ویژه در معناشناسی، چه‌گونه به‌کار می‌رود (یا می‌تواند به‌کار برود).

در این راه، از پیشنهادها و انتقادهای بسیار کسان بهره برده‌ایم. علاوه بر همکاری چند دوره از دانشجویان گروه زبان‌شناسی گوتبرگ[1]، که باید به‌عنوان گروه آزمایشی از آن‌ها استفاده می‌شد، مایلیم از کلاس اَبِرگ[2]، که دست‌نویس کتاب را در مراحل مختلف آماده‌سازی خوانده است، از مایکل گرَبسکی[3] که آن را از سوئدی به آلمانی برگردانده و تغییراتی را پیشنهاد کرده ـ که بسیاری از آن‌ها در تقریر حاضر اعمال شده ـ هم‌چنین از جان لاینز[4] که یکی از ویراستاران این مجموعه است، تشکر کنیم. از پیتر هینست[5] نیز سپاس‌گزاریم، به‌خاطر نقد کوبنده‌اش به تقریر آلمانی اثر که بعضی از انتقادهایش را می‌پذیریم. اگر سرسختی‌های ما نبود، همه‌ی این افراد می‌توانستند تأثیرات مثبت به مراتب بیش‌تری بر کتاب داشته باشند. باید به خاطر همکاری صمیمانه در زمینه‌ی تایپ و ویرایش از پیر جاوانود[6]، آن ـ ماری رانستراند[7] و کارکنان انتشارات دانشگاه کمبریج تشکر کنیم.

---

1. Göteborg
2. Claes Åberg
3. Michael Grabski
4. John Lyons
5. Peter Hinst
6. Pierre Javanaud
7. Ann-Mari Ranstrand

گرچه کتاب، حاصل کار گروهی است، مسئولیت اصلی فصل‌های مختلف، به‌ترتیب، با افراد زیر بوده است:

ـ فصل‌های ۱، ۳، ۴، ۸ و بخش ۳ از فصل ۹، ینس اَلوود[1]

ـ فصل‌های ۵ و ۶، لارس ـ گونار اندرسُن[2]

ـ فصل‌های ۲، ۷، ۱۰ و بقیه‌ی فصل ۹، اُستن دال.[3]

نمادها و نشانه‌ها

$\in$	**نشانه‌ی عضو (عضوِ...بودن)**	ص ۱۶
$\notin$	**عضو نبودن**	ص ۱۶
{ }	**دو ابرو (علامت مجموعه)**	ص ۱۶
$\varnothing$	**مجموعه‌ی تهی**	ص ۱۶
1	**مجموعه‌ی فراگیر (جهانی)**	ص ۱۸
$\subset$	**اِندراج محض (زیرمجموعه محضِ...بودن)**	ص ۱۸
$\subseteq$	**اِندراج (زیرمجموعه‌ی ...بودن)**	ص ۱۸
=	**این‌همانی مجموعه**	ص ۱۹
$\cap$	**اشتراک**	ص ۲۰
$\cup$	**اجتماع**	ص ۲۰
$-$	**تفاضل**	ص ۲۰
C	**مکمل**	ص ۲۲
<>	**دوگوشه (علامت n-تایی)**	ص ۲۲
t	**صادق**	ص ۴۵
f	**کاذب**	ص ۴۵
|	**خطِ شفر**	ص ۴۶
~ $(-,\neg)$	**نفی**	ص ۴۷
& $(\wedge,\cdot)$	**عاطف**	ص ۴۹
$\vee$	**یای مانع خلو**	ص ۵۳
$(\vee)$	**یای انفصال حقیقی**	ص ۵۳

1. Jens Allwood
2. Lars–Gunnar Andersson
3. Östen Dahl

$\to$ ($\supset$)	استلزام (مادی)	ص ۵۵
$\equiv$ ($\leftrightarrow$, $\subsetneqq$)	ادات هم‌ارزی	ص ۵۹
$\forall$	سور عمومی	ص ۸۴
$\exists$	سور وجودی	ص ۸۹
$\bar{R}$	معکوس R	ص ۱۱۷
M ($\Diamond$)	عمل‌گر احتمال	ص ۱۴۰
N ($\Box$)	عمل‌گر ضرورت	ص ۱۴۰
$\leftrightarrow$	استلزام اکید (قلاب)	ص ۱۴۱
$\Box\!\!\rightarrow$	شرطی خلافِ واقع	ص ۱۵۲
F, H, G, A	عمل‌گرهای زمان	ص ۱۵۳
ι	عمل‌گر یوتا	ص ۱۸۹
λ	عمل‌گر لاندا	ص ۱۹۳
O	الزام	ص ۱۴۲
P	جواز	ص ۱۴۲
$A, B, C\ldots$	مجموعه‌ها (در نظریه‌ی مجموعه)	ص ۱۵
$A, B, C\ldots$	ثابت‌های محمولی (در منطق محمول‌ها)	ص ۸۱
$a, b, c\ldots$	عضوهای مجموعه‌ها (در نظریه‌ی مجموعه)	ص ۱۵
$a, b, c\ldots$	ثابت‌های فردی (در منطق محمولی)	ص ۸۱
$\mathscr{A}, \mathscr{B}, \mathscr{C}\ldots$	مجموعه‌ی مجموعه‌ها	ص ۱۹
$f, g, h\ldots$	تابع‌ها	ص ۲۲
$p, q, r\ldots$	متغیرهای جمله‌ای	ص ۶۰
$x, y, z\ldots$	متغیرهای فردی	ص ۸۲
$\Phi, \Psi, \mathrm{X}\ldots$	متغیرهای محمولی	ص ۸۲
α, β, γ	فرامتغیرهای فرمول‌های درست‌ساخت	ص ۹۵
$P, Q, R\ldots$	فرامتغیرهای عبارت‌های محمولی	ص ۹۵
$t_1, t_2\ldots t_n$	فرامتغیرهای عبارت‌های فردی	ص ۹۵

* در متن ترجمه، عبارت‌ها به زبان انگلیسی و دیگر زبان‌های طبیعی و نیز اصطلاح‌ها و معنای آن‌ها در پانوشت قرار داده شده؛ واژه‌های مهم نیز با حروف پررنگ معرفی شده‌اند.

فصل اول

منطق برای زبان‌شناسان

بیش‌تر زبان‌شناسان قرن بیستم، جنبه‌های ساختی زبان را موضوع اصلی مطالعه‌ی خود قرار داده‌اند. این امر نه تنها در مورد ساخت‌گرایانی چون سوسور[۱]، یلمزلف[۲]، بلومفیلد[۳] و زبان‌شناسان مکتب پراگ صدق می‌کند، شاید حتی بارزتر، در مورد چامسکی[۴] و مکتب زایشی- گشتاری نیز، که در مطالعه‌ی صوری ساخت زبان‌شناختی موفقیت‌هایی چشمگیر به‌دست آورده‌اند، صادق باشد. چشم‌گیرترین موفقیت‌های ساخت‌گرایی[۵] در زمینه‌های واج‌شناسی و صرف‌ونحو بوده است؛ اما درباره‌ی ساختار صوری محتوا و معنای زبان توفیق چندانی حاصل نمی‌شد و بسیاری از ساخت‌گرایان در واقع، محتوای زبان را به حدی نادیده گرفته‌اند که اصولاً معناشناسی را بخشی از زبان‌شناسی تلقی نمی‌کنند.

بنابراین، برخی از تلاش‌های جالب توجه برای توصیف ساختار محتوا و نیز ساخت به طور کلی را باید نه در زبان‌شناسی، به مفهوم خاص آن، بلکه در منطق صوری یافت. گرچه منطق قرن بیستم، منطق ریاضیات و زبان ریاضی را محور کار خود قرار داده، باوجوداین، منطق‌دانانی چون فرگه[۶]، راسل[۷]، کارناپ[۸]، رایشنباخ[۹] و مونتاگیو[۱۰] زبان عادی روزمره را نیز، هر چند به‌طور

---

1. Ferdinand de Saussure
2. Louis Hjelmslev
3. Leonard Bloomfield
4. Noam Chomsky

۵. برای شرحی مختصر درمورد زبان‌شناسی ساخت‌گرا ر.ک. Davies (1973).

6. Gottlob Frege
7. Bertrand Russell
8. Rudolf Carnap
9. Hans Reichenbach
10. Richard Merritt Montague.

ناقص‌تر تحلیل کرده‌اند[1]. امروزه زبان‌شناسان و منطق‌دانان به‌طور جدی شروع به استفاده از روش‌های منطقی در مطالعه‌ی زبان‌های طبیعی کرده‌اند و چندین تحلیل بسیار جالب از ساخت معنایی پدید آمده است.

هدف این کتاب، آشنا کردن دانشجویان زبان‌شناسی و دیگر علاقه‌مندان معناشناسی زبان‌های طبیعی با برخی مفاهیم و نظریه‌های بنیادی منطقی است. امروزه اطلاعاتی در باب این‌گونه مفاهیم و نظریه‌ها، برای کسانی که معناشناسی معاصر یا به طور کلی زبان‌شناسی را مطالعه می‌کنند، لازم است. روش‌هایی که منطق صوری برای مطالعه‌ی معناشناسی زبان‌های ساختگی ارائه کرده است، به‌نحوی سودمند در مورد معناشناسی زبان طبیعی به‌کار رفته است؛ و به‌طور کلی، روش‌ها و رهیافت‌های اتخاذ شده از نظریه‌ی منطقی و ریاضی، به‌طور روزافزون در نظریه‌ی زبان‌شناختی، متداول شده است. دستور گروه ساختی که چامسکی در کتاب «ساخت‌های نحوی» (۱۹۵۷) ارائه کرد، نمونه‌ی خوبی از این کاربردهاست. در این کتاب، با استفاده از نوع دستوری که پاول مارتین پُست[2]، منطق‌دان آمریکایی، برای توصیف ساخت زبان‌های صوری ارائه داد، چامسکی توانسته است «دستگاه‌های بازنویسی» را در مورد زبان‌های طبیعی به کار گیرد.

هدف دیگر ما این است که ضمن کمک به پر کردن شکاف بین زبان‌شناسی و منطق، زبان‌شناسان و منطق‌دانان را به همکاری نزدیک‌تر در زمینه‌ی مطالعه‌ی مشترک‌شان در مورد ساخت زبان تشویق کنیم؛ گرچه هدف اصلی نگارش این کتاب، تأکید برجنبه‌های مقدماتی و آموزشی بوده، کوشیده‌ایم با ارائه‌ی نمونه‌هایی از این‌که چه‌گونه می‌توان تحلیل منطقی را در مورد زبان طبیعی به‌کار برد و نیز بحث درباره‌ی رابطه‌ی بین تحلیل منطقی و زبانی، و بین منطق و زبان طبیعی، ادعای خود را مبنی بر این‌که منطق، حوزه‌ای در خور مطالعه برای افرادی است که در اساس با زبان طبیعی سروکار دارند، به اثبات برسانیم.

هر چند کل کتاب را می‌توان برهانی ضمنی در اثبات ارزش منطق برای زبان‌شناسی تلقی کرد، در فصل پایانی، به طور صریح در این زمینه به بحث پرداخته‌ایم.

---

۱. برای تاریخچه ای از منطق جدید و قدیم ر.ک. Kneale and Kneale (1962)

2. Paul Martin Post (1936)

فصل دوم

نظریه‌ی مجموعه‌ها

۱.۲ مجموعه‌ها و عضوها

در فصل‌های بعد، از مفاهیم رایج در **نظریه‌ی مجموعه‌ها** به طور مکرر استفاده خواهیم کرد[۱]. نظریه‌ی مجموعه‌ها علاوه بر ارتباطی که با منطق دارد، در ریاضیات نقشی اساسی ایفا می‌کند و در زبان‌شناسی نیز کاربردهایی مستقیم دارد. بنابراین، در آغاز، مهم‌ترین مفاهیم این نظریه را توضیح می‌دهیم.

مجموعه عبارت است از تعدادی یا گردآورده‌ای از شیءها یا موجوداتی از هر نوع. اصطلاح‌های دیگری که اغلب برای اشاره به مجموعه‌ها به‌کار می‌رود، عبارت‌اند از: «رده» و «گروه» (گرچه این دو اصطلاح در ریاضیات کاربردهای فنی دیگری نیز دارند). هر مجموعه شامل تعدادی **عنصر** یا **عضو** است. مجموعه‌هایی که ما در زندگی روزمره با آن‌ها سروکار داریم، معمولاً شامل عضوهایی است که وجه مشترکی با هم دارند؛ مانند مجموعه‌ی همه‌ی ایرانی‌ها یا مجموعه‌ی تمام کتاب‌های موجود در یک کتابخانه‌ی خاص. نظریه‌ی مجموعه‌ها چنین محدودیتی را بر مجموعه‌ها بار نمی‌کند؛ یک مجموعه می‌تواند از عضوهایی تشکیل شود که هیچ ارتباطی با هم ندارند؛ می‌توان مجموعه‌ای را در نظر گرفت که شامل رئیس‌جمهور ایران، کوچک‌ترین قمر مریخ و جذر عدد هفت باشد.

چند قرارداد نمادگذاری: از حروف بزرگ ایتالیک (A ، B ، C ، ...) برای اشاره به مجموعه‌ها و از حروف کوچک ایتالیک (a ، b ، c ، ...) برای اشاره به هر یک از شیءهایی که عضو مجموعه‌ها هستند، استفاده خواهیم کرد. هم‌چنین نماد $\in$ را معرفی می‌کنیم، که باید

---

۱. از میان کتاب‌های مقدماتی خوب درباره‌ی نظریه‌ی مجموعه‌ها می‌توان به Halmust (1960)، Stoll (1961) و Lipschutz (1964) اشاره کرد.

چنین خوانده شود: «عضوی است از ...». برای مثال، جمله‌ی «a عضوی است از B» به‌صورت $a \in B$ نوشته می‌شود. هم‌چنین اگر بخواهیم بگوییم a عضوی از B نیست، آن را به‌صورت $a \notin B$ می‌نویسیم.

همین‌طور برای نوشتن عبارت‌هایی چون «مجموعه‌ای که متشکل از این افراد است: علی، بهرام، منیژه» یا «مجموعه‌ی همه‌ی ایرانی‌هایی که موی بور دارند»، نیاز به نمادگذاری داریم. برای این کار، از دو ابرو {} استفاده می‌کنیم. همان‌طور که از این مثال‌ها برمی‌آید، حداقل دو روش برای تعریف مجموعه‌ها وجود دارد: **شمارش و توصیف**

مثال‌های ما با دو ابرو به‌صورت زیر در می‌آید:

شمارش: {علی، بهرام، منیژه}

توصیف: {x | x یک ایرانی مو بور است}

(که باید خوانده شود: «مجموعه همه‌ی x هایی که x یک ایرانی مو بور باشد.)

در زبان عادی نیز ساخت‌هایی برای بیان مفاهیم بالا وجود دارد. مثلاً در روش شمارش، معمولاً از حرف ربط «و» استفاده می‌کنند، مانند: «علی، بهرام و منیژه». در روش توصیفی از بندهای موصولی استفاده می‌کنند، مانند «آن‌هایی که ایرانی هستند»، «ایرانی‌ها».

گرچه ممکن است تعجب‌آور باشد، اما باید دانست که در نظریه‌ی مجموعه‌ها امکان دارد مجموعه‌هایی داشته باشیم که تنها دارای یک عضو و حتی بدون عضو باشند. به ازای هر فرد یا شیء در جهان، مجموعه‌ای وجود دارد که تنها عضو آن، همان فرد یا شیء است. برای مثال، با شخص a می‌توان مجموعه‌ی $\{a\}$ را تشکیل داد. به‌خاطر داشته باشید که a و $\{a\}$ دو چیز متفاوت‌اند: a مجموعه نیست.

مجموعه‌ای که تنها یک عضو داشته باشد، **مجموعه‌ی تک‌عضوی** و مجموعه‌ای که هیچ عضوی نداشته باشد (دارای صفر عضو باشد)، **مجموعه‌ای تهی** نامیده می‌شود. البته بهتر است گفته شود «مجموعه‌ی تهی» و نه «یک مجموعه‌ی تهی»؛ زیرا تنها یک مجموعه‌ی تهی وجود دارد، که آن را با نماد $\emptyset$ نشان می‌دهند. دلیل این‌که می‌گوییم تنها یک مجموعه‌ی تهی وجود دارد، این است که در نظریه‌ی مجموعه‌ها، اصلی کلی به نام **اصل هم‌مصداقی** وجود دارد، که می‌گوید: برای آن‌که دو مجموعه از یک‌دیگر متمایز باشند، باید حداقل یک چیز داشته باشیم که عضو یکی از آن‌هاست، اما عضو دیگری نیست. به‌عبارت‌دیگر، اگر فهرست عناصر موجود در دو مجموعه یکسان باشد، با یک مجموعه‌ی واحد سروکار داریم. بدیهی است که هر

مجموعه‌ی تهی دارای تعداد یک‌سانی عضو (یعنی صفر) است. بنابراین، تنها یک مجموعه‌ی تهی وجود دارد. نتیجه‌ی متعارض‌گونه‌ی این مسئله آن است که مثلاً بگوییم مجموعه‌ی همه رؤسای‌جمهور زن ایالات متحده با مجموعه‌ی همه سگ‌هایی که می‌توانند برنامه‌ی کامپیوتر بنویسند، یکی است. با وجود این، اگر تفاوت بین (الف) شیوه‌ی انتخاب عضوهای یک مجموعه (معیار تمایز عضوها از غیرعضوها) و (ب) عضوهایی که عملاً انتخاب می‌شوند را در نظر بگیریم، این مسئله بهتر درک می‌شود. بدیهی است که عضوهای یک‌سان را می‌توان به روش‌های بسیار متفاوت انتخاب کرد. منظور از اصل هم‌مصداقی این است که روش‌های انتخاب عضوهای مجموعه کاملاً نادیده گرفته شود. این امر مربوط است به تمایز بین **مفهوم و مصداق** یا دایره‌ی مصداق‌های یک عبارت زبانی ـ تمایزی که در فصل‌های بعدی این کتاب از اهمیت بسیار برخوردار خواهد بود.

یک عبارت اسمی را در نظر بگیرید که مجموعه‌ای را توصیف می‌کند، مثل «ایرانی‌هایی که موی بور دارند»؛ می‌توان گفت که این عبارت اسمی با مشخص کردن تعدادی از ویژگی‌های مشترک، شیءها یا موجوداتی معین را در جهان انتخاب می‌کند (به آن‌ها اشاره می‌کند). موجودات انتخاب شده یا مورد اشاره‌ـ یعنی افرادی که ایرانی و مو بور هستند ـ مصداق‌های این عبارت اسمی‌اند؛ در صورتی که شیوه‌ی انتخاب آن‌ها، یعنی معیارهایی که برای تعیین مصداق‌های این عبارت به کار رفته، مفهومِ عبارت خواهد بود. به این ترتیب، می‌توان گفت که مفهوم «مجموعه» در نظریه‌ی مجموعه‌ها، **مصداقی** است؛ به این معنا که در این نظریه به روش‌های انتخاب اعضای مجموعه کاری نداریم؛ عنوان «اصل هم‌مصداقی» نیز از این‌رو انتخاب شده است.

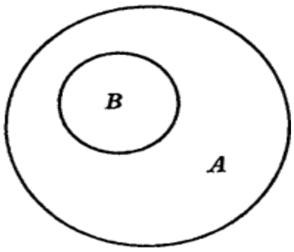
هم‌چنین، از آن‌چه گفته شد، درمی‌یابیم که مفهوم ریاضی مجموعه با مفهوم متداولی که واژه‌هایی مثل «رده» و «گروه» را برای آن به‌کار می‌بریم، کاملاً یک‌سان نیست؛ گرچه در آغاز این فصل، بین آن‌ها فرقی قایل نشدیم. وقتی در زندگی روزمره از گروه، مثلاً گروهی از مردم صحبت می‌شود، اغلب این‌طور فکر می‌کنیم که این گروه ثابت است، علی‌رغم آن که عضوهایش از زمانی به زمان دیگر تغییر می‌کنند. به‌این‌ترتیب، می‌توان مثلاً درباره‌ی گروهی از مردم که بر بریتانیا حکومت می‌کنند، صحبت کرد و حتی جمله‌هایی مانند «اعضای این گروه درحال‌حاضر بیش از اعضای آن در گذشته است» را به‌کار برد. اگر فرض بر این بود که اصل هم‌مصداقی در مورد موجودی که با عبارت «این گروه» به آن اشاره می‌شود، برقرار است،

جمله‌ی بالا یک جمله‌ی متناقض می‌بود. هم‌چنین، باید توجه داشت که گرچه به گروه‌ها، رفتارهای زیادی را نسبت می‌دهیم و مثلاً می‌گوییم، «آن‌ها فلان کارها(ی دسته‌جمعی) را انجام می‌دهند» ـ مانند «گروه ما دادخواست برای دولت فرستاد»ـ بعضی از ریاضی‌دان‌ها خواهند گفت که مجموعه‌ها، موجوداتی انتزاعی هستند و نمی‌توانند چنین کارهایی انجام دهند.

مجموعه‌ی ویژه‌ی دیگری وجود دارد که **مجموعه‌ی فراگیر** نامیده می‌شود و آن را به‌صورت 1 (عدد یک) نشان می‌دهند. برای توضیح مجموعه‌ی **فراگیر**، ناگریز از معرفی یک مفهوم دیگر، یعنی **عالم سخن** هستیم، که می‌توان آن را با مسامحه چنین تعریف کرد: «هر چیزی که در متن یا گفت‌وگویی معین، از آن صحبت می‌شود». برای مثال، در یک کتاب درسی ریاضی، عالم سخن می‌تواند همه‌ی اعداد باشد، درحالی‌که در یک کتاب درسی فیزیک، عالم سخن را ممکن است همه‌ی اجسام فیزیکی تشکیل دهند. به‌این‌ترتیب، مجموعه‌ی فراگیر عبارت است از مجموعه‌ی همه‌ی افراد در عالم سخن مربوطه.

۲.۲ نسبت‌های بین مجموعه‌ها

تعدادی از مفاهیم نظریه‌ی مجموعه‌ها مربوط به نسبت‌های بین مجموعه‌هاست. این نسبت‌ها را می‌توان با ترسیم مجموعه‌ها به شکل دایره نشان داد. برای مثال، مجموعه‌ی همه‌ی اروپایی‌ها و مجموعه‌ی همه‌ی انگلیسی‌ها را در نظر بگیرید. ازآن‌جاکه همه‌ی انگلیسی‌ها اروپایی هستند، برای نشان دادن نسبت بین این دو مجموعه، می‌توان نمودار (۱) را ترسیم کرد، که در آن A عبارت از مجموعه‌ی همه‌ی اروپایی‌ها و B مجموعه‌ی همه‌ی انگلیسی‌هاست. در چنین موردی می‌گوییم B زیر مجموعه‌ی A است، یا به‌عبارت‌دیگر، B مندرج در A است. در نظریه‌ی مجموعه‌ها معمولاً بین دو رابطه‌ی «اِندراج» **و** «اِندراج محض» فرق می‌گذارند. اگر مجموعه‌ای چون B به‌طور کامل (properly) مندرج در مجموعه‌ی A باشد، همه‌ی اعضای B، اعضای A خواهند بود. به‌علاوه، A حداقل یک عضو خواهد داشت که عضو B نباشد. در این حالت می‌نویسیم $B \subset A$ نماد $\subset$ یعنی «... کاملاً مندرج در ... است» یا «... زیرمجموعه‌ی محض... است». در صورتی که نخواهیم ادعا کنیم که A حداقل یک عضو دارد که متعلق به B نیست (که اغلب، همین‌طور است)، می‌نویسیم $B \subseteq A$ که بدین‌معناست: «B مندرج در A است» یا «B زیرمجموعه‌ی A است».



(۱)

برای آن‌که بگوییم A و B مجموعه‌های یکسان‌اند ـ به‌عبارت‌دیگر، یکی هستند ـ می‌نویسیم: $A=B$. همان‌طور که در بخش گذشته دیدیم، معنای جمله‌ی اخیر این است که دو مجموعه، دارای اعضای یکسان‌اند.

لازم است بین دو رابطه‌ی «عضوی است از...» و «زیرمجموعه‌ای است از...» فرق بگذاریم. مجموعه‌ی همه‌ی انگلیسی‌ها زیرمجموعه‌ای از مجموعه‌ی همه‌ی اروپایی‌هاست، اما عضوی از آن نیست. ازسوی‌دیگر، «جان اسمیت» عضوی از مجموعه‌ی همه‌ی انگلیسی‌هاست، درحالی‌که زیرمجموعه‌ی آن محسوب نمی‌شود.

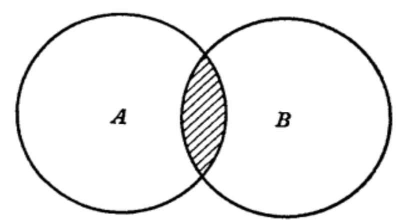
۳.۲ عمل‌های روی مجموعه‌ها

مجموعه‌هایی نیز وجود دارد که اعضای آن‌ها خود، هر کدام یک مجموعه است. (چنین مجموعه‌هایی را گاه **خانواده** نیز می‌نامند). مثلاً به ازای هر مجموعه‌ای مانند A می‌توان مجموعه‌ای تشکیل داد که از همه‌ی زیرمجموعه‌های A تشکیل شده باشد. این مجموعه را **مجموعه‌ی توانی** A می‌گویند. مثال: $\{a,b\}$ دارای این زیرمجموعه‌هاست: $\emptyset$، $\{a,b\}$، $\{b\}$ و $\{a\}$. (مجموعه‌ی تهی، زیرمجموعه‌ی همه‌ی مجموعه‌هاست)، پس مجموعه‌ی توانی $\{a,b\}$ عبارت خواهد بود از: $\{\emptyset$ و $\{a,b\}$ و $\{b\}$ و $\{a\}\}$.

برای آن‌که مجموعه‌های مجموعه‌ها از مجموعه‌های معمولی تمیز داده شود، برای اشاره به آن‌ها، از حروف بزرگ **تحریری** مثلاً $\mathscr{A}$ استفاده خواهیم کرد.

قبلاً در مورد شیوه‌های مختلف تعریف مجموعه صحبت کردیم. با استفاده از آن‌چه اصطلاحاً **عمل‌های مجموعه‌ای** یا **عمل‌های روی مجموعه‌ها** نامیده می‌شود، می‌توان یک مجموعه را برحسب مجموعه‌های دیگر نیز تعریف کرد. هرگاه دو مجموعه‌ی A و B داشته باشیم، می‌توانیم مجموعه‌ای را تعریف کنیم که شامل همه‌ی اشیایی باشد که هم عضو A و هم عضو B

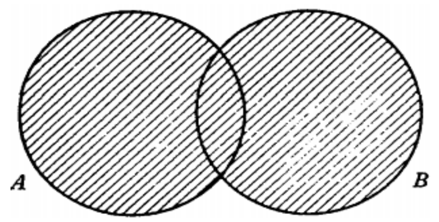
هستند. چنین مجموعه‌ای را «**اشتراک** A و B» می‌نامند و آن را با $A \cap B$ نشان می‌دهند. در نمودار (۱) قسمت سایه خورده، این مجموعه را نشان می‌دهد.



(۱)

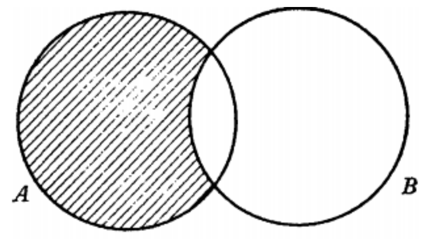
مثال: اگر A مجموعه‌ی همه‌ی زبان‌شناسان و B مجموعه‌ی همه‌ی سوئدی‌ها باشد، آن‌گاه $A\cap B$ مجموعه‌ی همه‌ی زبان‌شناسان سوئدی خواهد بود.

هم‌چنین ممکن است بخواهیم از مجموعه‌ی همه‌ی چیزهایی صحبت کنیم که عضو یکی از دو مجموعه‌ی A و B یا هر دو باشند. این مجموعه، **اجتماع** A و B نامیده می‌شود و آن را با $A\cup B$ نشان می‌دهند. این مجموعه در نمودار (۲) نشان داده شده است.



(۲)

مثال: اگر A مجموعه‌ی همه‌ی افرادی باشد که کتاب «شاهنامه‌ی فردوسی» را خوانده‌اند و B مجموعه‌ی همه‌ی افرادی باشد که کتاب «بوستان سعدی» را خوانده‌اند، $A\cup B$ مجموعه‌ی همه‌ی افرادی خواهد بود که کتاب «شاهنامه‌ی فردوسی» یا «بوستان سعدی» (یا هر دو) را خوانده‌اند.



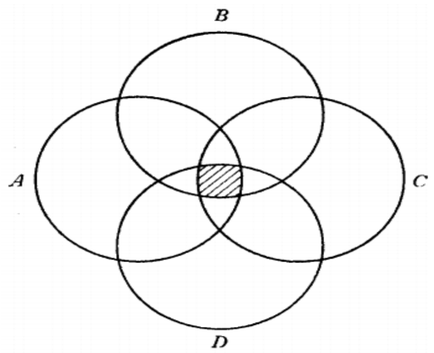
(۳)

مجموعه‌ی سایه زده شده در نمودار (۳)، یعنی مجموعه‌ی همه‌ی چیزهایی که عضو A هستند ولی عضو B نیستند، «**تفاضل** A و B» نامیده می‌شود و آن را به‌صورت $A\text{-}B$ (بخوانید A منهای B)

نشان می‌دهند. مثال: اگر A مجموعه‌ی همه‌ی ایرانی‌ها و B مجموعه‌ی همه‌ی کسانی باشد که می‌توانند انگلیسی صحبت کنند، آن‌گاه A-B مجموعه‌ی همه‌ی ایرانی‌هایی است که نمی‌توانند انگلیسی صحبت کنند (مجموعه‌ی همه‌ی ایرانی‌هایی که فقط فارسی صحبت می‌کنند).

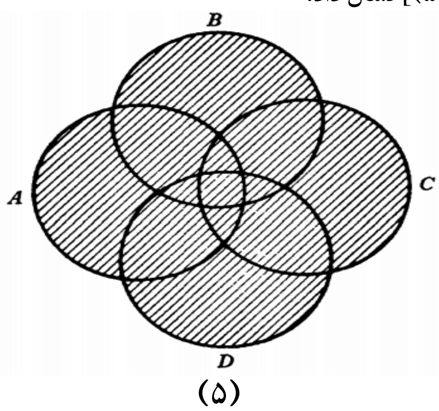
تا این‌جا تنها درباره‌ی اعمال روی دو مجموعه صحبت کردیم، اما این عمل‌ها را می‌توان به سه مجموعه یا بیش‌تر هم تعمیم داد.

برای مثال، می‌توان اشتراک A، B، C و D (مجموعه‌ی دربرگیرنده‌ی همه‌ی چیزهایی که به هر چهار مجموعه‌ی A، B، C و D تعلق دارند) را به‌عنوان عملی روی مجموعه‌ی مجموعه‌های $\{A, B, C, D\}$ تعریف کرد و آن را با $\cap \{A, B, C, D\}$ [قسمت سایه‌زده شده در نمودار (۴)] نشان داد.



(۴)

به همین ترتیب، اجتماع C, B, A و D (مجموعه‌ی در برگیرنده‌ی همه‌ی چیزهایی که عضو حداقل یکی از چهار مجموعه‌ی C, B, A و D هستند) را می‌توان با $\cup\{A, B, C, D\}$ [قسمت سایه‌زده شده در نمودار (۵)] نشان داد.



(۵)